Wie funktioniert das Verdoppelungsprinzip?

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß beim Roulette-Spiel die Kugel auf eine rote Zahl fällt? Geht man vom europäischen Roulette aus, wo es nur ein Zero-Feld gibt(wo die Bank abkassiert), so ist diese Wahrscheinlichkeit

$$P(rot) = \frac{18}{37}$$

weil es genau 37 mögliche Felder gibt (incl. dem Zero-Feld, das ja gar keine Farbe hat) und davon 18 rot sind. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Kugel schwarz ist, ist genau so groß, und die Wahrscheinlichkeit für den Fall, daß man kein rotes Feld bekommt, ist

$$1 - \frac{18}{37} = \frac{19}{37}. \qquad (1)$$

Man sieht: wer immer nur auf eine Farbe setzt, verliert langfristig, wiel in 19 von 37 Fällen seine Farbe eben nicht zum Zuge kam.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß bei zwei Spielen hintereinander jeweils kein rotes Feld getroffen wird? Nun, beim ersten Spiel gab es 37 Möglichkeiten für die Kugel, beim nächsten bleibt das so, und insgesamt ergibt das $37 \cdot 37$ Möglichkeiten. Dasselbe gilt für das Eintreffen des Ereignisses 'rote Kugel', so daß die gesuchte Wahrscheinlichkeit für das Ereignis lautet:

$$P(\text{ zweimal keine rote Kugel }) = \left(\frac{19}{37}\right)^2 \qquad (2)$$

Naive Zeitgenossen, die sich einbilden, sie könnten mit der berüchtigten Verdoppelungsstrategie beim Roulette ein Vermögen gewinnen, denken beim Anblick der Formel (2), sie würde doch ihre Gewinnerwartung bestätigen, denn beim n-ten Spiel wird die obige Gleichung zu

$$P(\text{ n mal keine rote Kugel }) = \left(\frac{19}{37}\right)^n \qquad (3)$$

und dieser Ausdruck konvergiert mit wachsendem n gegen 0. Das ist richtig, aber mit wachsendem n nähert man sich auch schnell dem Zeitpunkt, wo die Bank sagt: jetzt ist Schluß mit lustig! Ende der Veranstaltung! Denn erstens haben die Croupiers auch mal Feierabend, und zweitens gibt es bei jedem Roulette eine Obergrenze für den Einsatz, und die ist mit dem Verdoppelungsprinzip sehr schnell erreicht.

Nehmen wir an, einer dieser mathematischen Analphabeten kommt ins Casino mit 1000 Euro in der Tasche und möchte schnell mal eben mit dem Verdoppelungsprinzip abkassieren. Außerdem setzen wir das Banklimit großzügig auf 10000 Euro. Er setzt also einen Euro auf rot. Wie viele male muß er das Doppelte setzen, bis er seine 1000 Euro verbraucht hat? Nun, beim 2.Spiel muß er 2 Euro setzen, beim dritten dann 4, beim vierten 8, usw. , beim n-ten Spiel 2^{n-1}. Wenn er auch beim 9.ten Spiel verliert, so ergibt das

$$\text{Verluste bei 9 verlorenen Spielen } = 1 + 2 + 4 + 8 + ... + 256 = 511 = 2^9 - 1 \qquad (4)$$

Euros. Weiter gehts dann nimmer, weil unser Kandidat im 10.ten Spiel jetzt 512 Euro setzen müßte, um wenigstens noch einen Gewinn von einem Euro rauszuholen. Die hat er aber nicht mehr, weil er bereits 511 Euro verspielt hat. *Hier müßte der Spieler also einsehen, dass seine Strategie gescheitert ist.*

Warum aber hätte er im Falle eines Gewinns (egal beim wievielten Spiel) immer nur einen Euro, also seinen Grundeinsatz, gewonnen? Auch das kann man mit einer simplen Rechnung einsehen: wir nehmen an, der Spieler beginnt mit einem Grundeinsatz g (oben hatten wir der Einfachheit halber $g = 1$ gesetzt). Im zweiten Spiel muß er dann $2g$ einsetzen, im dritten $4g$, im n-ten Spiel dann $g2^{n-1}$. Gewinnt er nun im n-ten Spiel, so bekommt er den Spieleinsatz dieses Spiels zurück, also $g2^{n-1}$ Euro, und denselben Betrag noch einmal als eigentlichen Gewinn. Doch was hat er nun wirklich gewonnen? Da er den Einsatz des letzten (also des n-ten) Spieles von der Bank zurückbekommen hat, müssen wir die Ausgaben für die ersten $n-1$ Spiele gegen den Gewinn $g2^{n-1}$ aufrechnen:

$$\text{Ausgaben für die ersten } n-1 \text{ Spiele: } g(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{n-2}) = g \sum_{i=0}^{n-2} 2^i = g \cdot 2^{n-1} - 1$$

Diese Ausgaben ziehen wir von dem ab, was die Bank im letzten Spiel als 'Gewinn' ausgezahlt hat:

$$g \cdot 2^{n-1} - (g \cdot 2^{n-1} - 1) = g$$

Wie man sieht: es bleibt nur ein mickriger Euro als Gewinn übrig, wenn man als Grundbetrag $g = 1$ gewählt hat. Insgesamt kann man mit dieser Strategie nie mehr als den Grundbetrag gewinnen, verlieren kann man dagegen erheblich mehr (bzw. alles).

Erhöhung des Grundkapitals

Jetzt könnte jemand auf die Idee kommen, mit einem höheren Gesamtbetrag ins Spielcasino zu gehen und dann nach dem gleichen Rezept zu verfahren, wie wir es eben beschrieben haben. Sagen wir, er nimmt 10000 Euro mit und beginnt wieder mit einem Euro Einsatz. Jetzt kann der Spieler ein wenig länger durchhalten, denkt man, und wird schon eher mal gewinnen können.

Schaun wir uns an, wie lange er jetzt spielen kann.

Verlust nach 9 verlorenen Spielen	$= 2^9 - 1 = 511$	Einsatz 10.Spiel	$= 2^9 = 512$
Verlust nach 10 verlorenen Spielen	$= 2^{10} - 1 = 1023$	Einsatz 11.Spiel	$= 2^{10} = 1024$
Verlust nach 11 verlorenen Spielen	$= 2^{11} - 1 = 2047$	Einsatz 12.Spiel	$= 2^{11} = 2048$
Verlust nach 12 verlorenen Spielen	$= 2^{12} - 1 = 4095$	Einsatz 13.Spiel	$= 2^{12} = 4094$
Verlust nach 13 verlorenen Spielen	$= 2^{13} - 1 = 8191$	Einsatz 14.Spiel	$= 2^{13} = 8192$

Wir sehen, daß der Spieler nach dem 12.verlorenen Spiel noch ein weiteres 13.Spiel wagen kann, aber wenn er auch das verliert, kann er nicht mehr weiterspielen, da er ja mit 10000 Euro Gesamtbetrag eingestiegen war und jetzt im nächsten Spiel noch mal 8192 Euro einsetzen muß, die er nicht hat. Wir sehen aber eins: wenn er verliert, ist der Verlust immer sehr groß (die nächstkleinere Zweierpotenz unter seinem Gesamtbetrag), der Gewinn jedoch vergleichsweise klein, nämlich immer 1 Euro. Würde jemand 40000 Euro Gesamtbetrag einsetzen, so würde er bei sturem Einsatz der Verdoppelungsstrategie $32767 = 2^{15} - 1$ Euro verlieren, d.h. er könnte sich eine Pechsträne bis zum 14.Spiel noch leisten, das 15. müßte er aber unbedingt gewinnen, um alle Verluste wieder auszugleichen.

Fazit: Der Gewinn beträgt immer ein Euro, ein verlorenes Spiel würde aber fast das gesamte Grundkapital verschlingen.

Erhöhung des Einsatzes

Die Erhöhung des Grundkapitals, das haben wir eben gesehen, bringt fast gar nichts an Gewinnen, dafür aber im Falle eines verlorenen Spiels den finanziellen Ruin des Spielers. Darüberhinaus nutzt auch eine noch weitere Erhöhung des Grundkapitals nichts, weil die Spielcasinos ohne Ausnahme eine Höchstgrenze für den Einsatz festgelegt haben. Für das Setzen auf Rot/Schwarz beispielsweise gilt bei den meisten Casinos als Höchsteinsatz 12000 Euro. Damit wäre also bei einem Anfangseinsatz von 1 Euro noch nicht mal ein 15.Spiel möglich, weil wir dann - wie wir oben gesehen haben - $2^{14} = 16384$ Euro setzen müßten, und das erlaubt die Bank nicht. Es folgt:

Bei der Verdoppelungsstrategie muß der Spieler spätestens das 14.Spiel gewinnen, vorausgesetzt das Banklimit beträgt 12000 *Euro.*

Gewinnt der Spieler, so ist dies aber immer nur ein einziger Euro, ein wenig lohnendes Geschäft.

Wie wäre es nun, wenn wir den Einsatz einfach erhöhen? Rechnen wir ein Beispiel durch: wir beginnen einfach mal mit 100 Euro. Jetzt sieht die Verlust/Gewinn-Tabelle so aus:

Verlust nach 5 verlorenen Spielen	$= 100 \cdot (2^5 - 1) = 3100$	Einsatz 6.Spiel	$= 100 \cdot 2^5 = 3200$
Verlust nach 6 verlorenen Spielen	$= 100 \cdot (2^6 - 1) = 6300$	Einsatz 7.Spiel	$= 100 \cdot 2^6 = 6400$
Verlust nach 7 verlorenen Spielen	$= 100 \cdot (2^7 - 1) = 12700$	Einsatz 8.Spiel	$= 100 \cdot 2^7 = 12800$

Jetzt wäre es schon nach 7 verlorenen Spielen aus: beim nächsten Spiel würde das Banklimit von 12000 Euro überschritten (wir müßten ja 12800 Euro setzen, um wenigstens unseren Gewinn von 100 Euro einzustreichen). Auch bei diesem Grundeinsatz gilt:

Egal, wann der Spieler gewinnt, er gewinnt immer nur diese 100 Euro, also seinen anfänglichen ersten Spieleinsatz. Die Anzahl der Spiele bis zu seinem unwiederbringlichen Verlust ist aber auf 7 gesunken. Salopp ausgedrückt: der Totalverlust rückt immer schneller immer näher!

Wenn der Spieler nur ein einziges mal verloren hätte, so hätte er also 12700 Euro verloren. Dieser Fall tritt mit einer Wahrscheinlichkeit von

$$\left(\frac{19}{37}\right)^7 = 0,941\%$$

ein. [1] Um die verlorenen 12700 Euro zurückzuholen, müßte er aber 127 mal hintereinander gewinnen (mit jeweils einem Gewinn von 100 Euro, ohne ein verlorenes Spiel dazwischen!), und dafür liegt die Wahrscheinlichkeit bei

$$\left(\frac{18}{37}\right)^{127}$$

und das sind etwa $1,811 \cdot 10^{-38}$, also eine verschwindend kleine Wahrscheinlichkeit.

Das Argument, daß die Gewinnwahrscheinlichkeit für einen Gewinn (also

$$P(rot) = \frac{18}{37}$$

) doch extrem viel höher ist als diese Verlustwahrscheinlichkeit, zieht hierbei nicht: denn der Gewinn beträgt ja jeweils nur 100 Euro, und selbst dann, wenn man 10 mal hintereinander gewonnen hätte, wären das nur 1000 Euro insgesamt gewesen! Wozu dann mit einem Grundstock von 10000 oder 20000 Euro antreten?

Weitere Erhöhung des Einsatzes

Und wenn ich gleich am Anfang den Höchstbetrag setze, den mir das Casino erlaubt, also 12000 Euro? Nun, dann kann man erstens nicht die Wirksamkeit der Verdoppelungsstrategie prüfen, denn ich könnte dann ja niemals ein zweites mal setzen und im übrigen wäre ich schnell pleite wegen des ZERO-Feldes, das die Ursache dafür ist, daß die Wahrscheinlichkeit für einen einfachen Gewinn beim Setzen auf RotSchwarz auf $\frac{18}{37}$ und die für einen Verlust auf $\frac{19}{37}$ beträgt.

Wie mans auch dreht und wendet: die Verdoppelungsstrategie ist reine Abzocke gegenüber naiven Spielern, die anfällig für großspurige Versprechen von angeblich seriösen "Systemspielern" sind. Mit ein paar elementaren Rechenoperationen kann man zeigen, daß beim Roulette nur einer gewinnt: die Bank des Spielcasinos.

[1] Siehe auch Wikipedia: http://de.wikipedia.org/wiki/Martingalespiel