Aufgabe zum schriftlichen Abitur 1964
Wie man einen maximal langen Stock durch eine rechtwinklige Röhre schiebt

Christian Winterhager

26. April 2013

1 Anschauliche Beschreibung des Problems

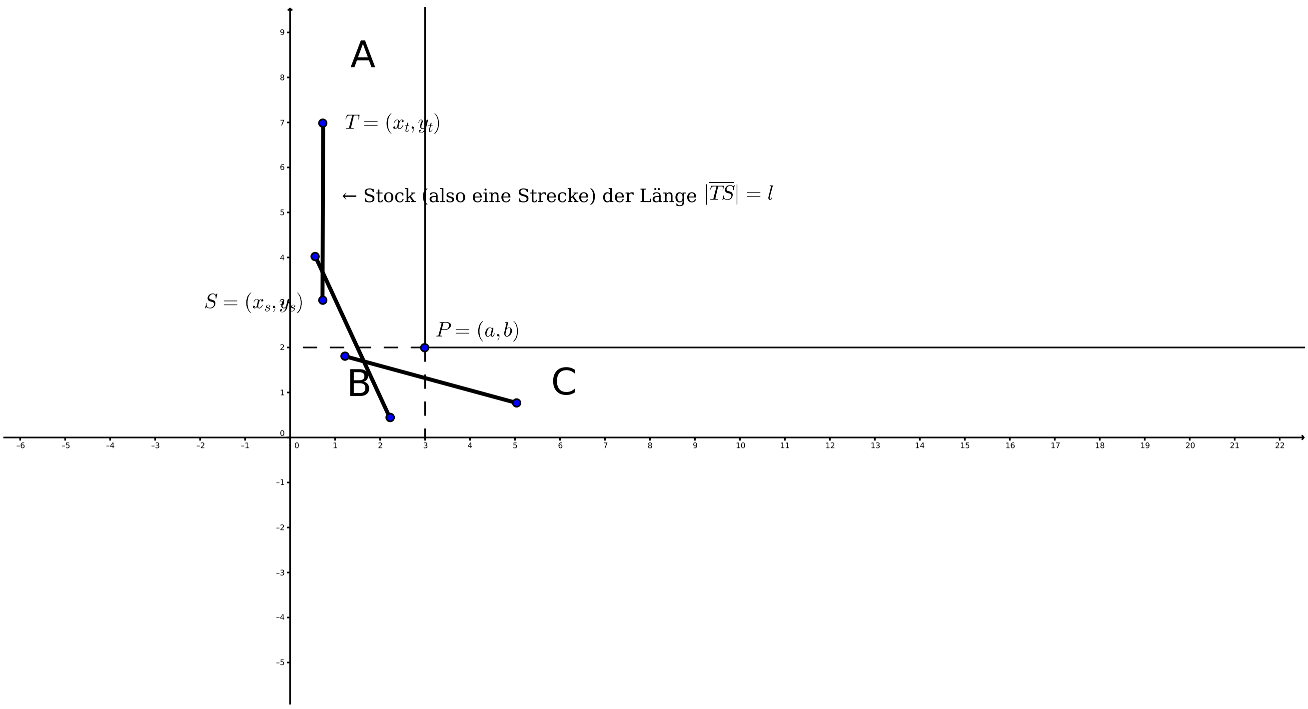

Abbildung 1: Strecke in 3 Positionen

In obiger Abbildung 1 ist eine rechtwinklige Röhre dargestellt, durch die ein maximal langer Stock geschoben werden soll. Man kommt also von oben her in den Bereich A, schiebt den Stock nach unten, bis er bei B auf die x-Achse trifft und schiebt ihn dann weiter in Richtung C. Dabei soll der Stock (wir sprechen im folgenden immer von der "Strecke") als ganzes erhalten bleiben, darf also unterwegs nicht verbogen werden. Außerdem ist unsere Röhre, wie man an der Zeichnung sieht, nicht überall gleich dick, ihre Gestalt ist im wesentlichen durch den Punkt (a, b) vorgegeben. In der Zeichnung sieht man die Strecke an drei verschiedenen Stationen der Reise durch die Röhre.

Wir präzisieren nun diese Aufgabe und beschreiben als erstes die "Röhre" in Form von Mengen:

$$\begin{aligned} A &:= \{(x,y) | 0 \le x \le a \text{ und } b \le y < \infty\} \\ B &:= \{(x,y) | 0 \le x \le a \text{ und } 0 \le y \le b\} \\ c &:= \{(x,y) | a \le x < \infty \text{ und } 0 \le y \le b\} \end{aligned} \tag{1}$$

Gesucht ist also eine Strecke maximaler Länge mit der folgenden Eigenschaft: die Strecke kann vollständig durch den "Röhre" geschoben werden, der von den Mengen A,B und C gebildet wird, ohne diesen zu verlassen.

Wie muß man nun dieses “Schieben” durch die Röhre **mathematisch** formulieren? Wir nehmen dazu irgendeine Zahl l als Länge der Strecke und beschreiben zunächst **umgangssprachlich**, wie wir die Strecke durch diese Röhre schieben. Wir beginnen unsere Reise im Teilbereich A an einer Stelle “weit oben”, d.h. an einem Punkt $T = (x_t, y_t)$, dessen Y-Koordinate noch größer als l ist, also $y_t > l$. Wegen dieser Voraussetzung paßt unsere Strecke noch voll in den Bereich $A \cup B$. Wir nehmen weiterhin o.B.d.A. an, daß $b \leq a$ gilt (andernfalls vertauscht man einfach die Rollen von a und b).

Nun unterscheiden wir 2 Fälle:

$$\begin{aligned} &\text{1.Fall: } l \leq a \\ &\text{2.Fall: } l > a \end{aligned} \tag{2}$$

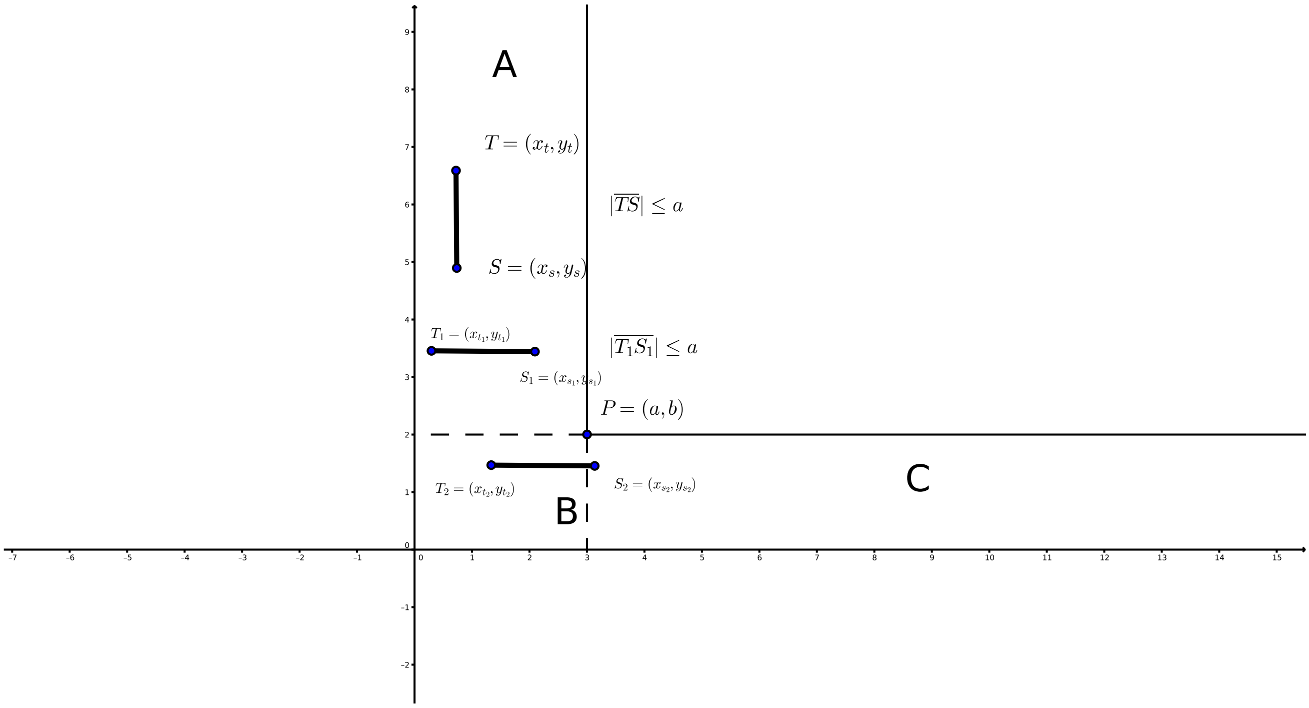

Abbildung 2: Strecken mit Länge $l \leq a$

In der Abbildung 2 sieht man die Strecke $\overline{TS}$ mit einer Länge $l \leq a$ in drei Positionen eingezeichnet. Die eine ($\overline{TS}$) steht soz. senkrecht in der Röhre A, die andere ($\overline{T_1S_1}$)ist parallel zur x-Achse ausgerichtet und paßt wegen der Voraussetzung $l \leq a$ komplett in die Röhre A. In der dritten Position $\overline{T_2S_2}$ schließlich ist die Strecke ebenfalls schon parallel zur x-Achse, befindet sich aber bereits zum Teil im Bereich C.
Wir können nun jede Strecke der Länge $l \leq a$, die irgendwie in A liegt (also z.B. die oben gezeichnete Strecke $\overline{TS}$), parallel zur x-Achse drehen, ohne den Bereich A zu verlassen, eben weil die Längen dieser Strecken ja kleiner als der Durchmesser der Röhre A sind.

Anschließend können wir jede dieser Strecken, wenn wir sie erst einmal parallel zur x-Achse ausgerichtet haben, ganz nach unten in den Bereich B schieben, ohne über die Kanten des Bereichs A oder B hinaus zu geraten. Sind wir dann unten in B angelangt, so kann man die Strecke natürlich ohne Probleme nach rechts in C hinein verschieben. Der Fall $l \leq a$ ist also trivial. (Anmerkung: wir argumentieren hier immer noch anschaulich, mathematisch exakt wird es erst später!) Interessant

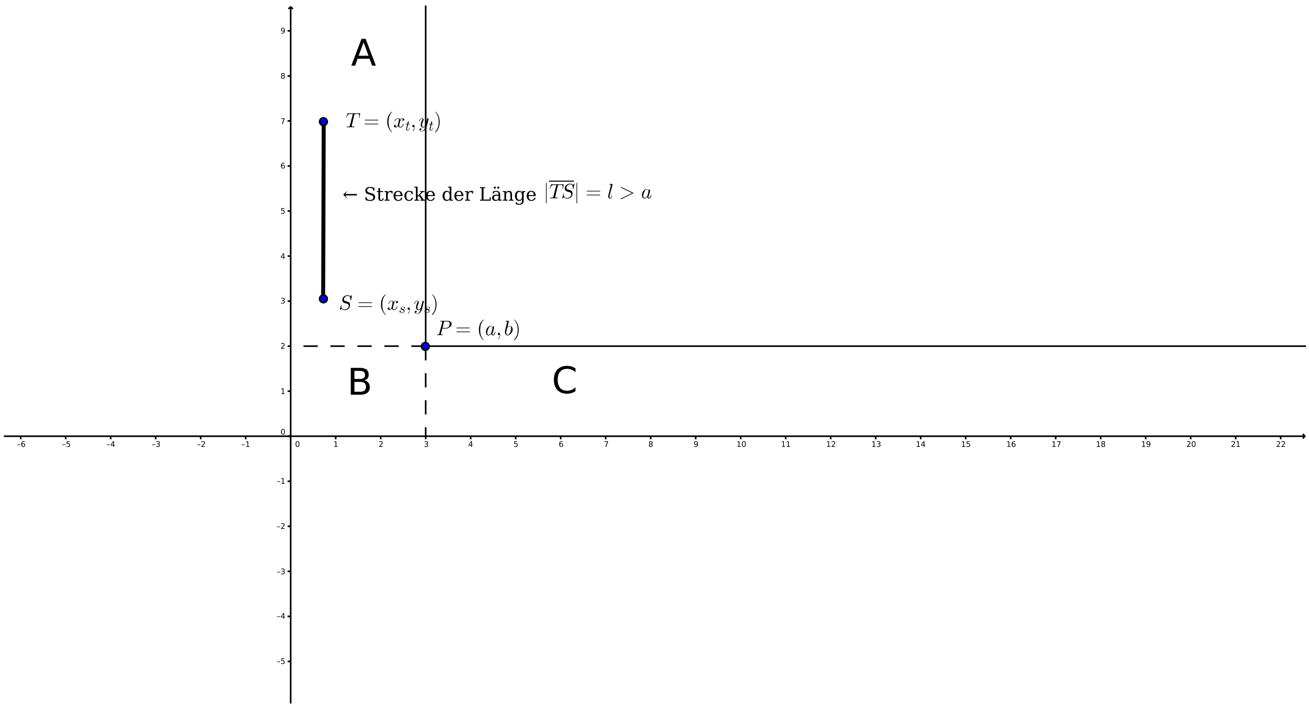

Abbildung 3: Strecken mit Länge $l > a$

ist also nur der 2.Fall: $l > a$.
Denkt man sich den Teilbereich A durch beliebige Parallelen zur x-Achse zerschnitten, so müßte unsere Strecke $\overline{TS}$ beginnend mit dem Punkt S diese Parallelen von oben nach unten durchstoßen, ohne jemals aus den Röhren auszubrechen.

Kritisch wird es in diesem Fall erst, wenn wir mit unserem Punkt T so weit nach unten wandern, daß y_t kleiner als l wird. Denn dann kann man die Strecke nicht mehr parallel zur y-Achse weiterschieben, sondern muß sie nun ein wenig drehen, damit sie noch in den Teil $A \cup B$ paßt. Unser Stock (oder die Strecke) stößt nun irgendwann auf den Boden des Teilbereichs B. Und da die Länge l jetzt $> a$ ist, kann man die Strecke im Bereich B auch nicht mehr beliebig weit drehen, so daß sie z.B. irgendwann parallel zur x-Achse wird. Man wird also mit dem Anfangspunkt irgendwann unterhalb der Parallelen zur x-Achse durch den Punkt P ankommen, ab da sind wir gerettet, weil wir dann unsere Strecke wieder komplett parallel zur x-Achse ausrichten können.

2 Mathematisch exakte Definition des Röhrenproblems

Wie könnte man also in all diesen Fällen die Bedingung mathematisch exakt formulieren, daß die Strecke mit der Länge l “durch die Röhre geschoben werden kann” ? Wir machen es uns einfach und setzen gleich voraus, daß wir die Strecke entlang der y-Achse von oben nach unten verschieben. Das bedeutet, daß wir bis zur Höhe $y_t = b$ den Punkt T immer auf der y-Achse lassen können (und S auch!!), den Punkt S aber ab dem Zeitpunkt, wo $y_t < l$ ist, nach rechts verschieben müssen. Versuchen wir es einfach:

Zu jedem y_t mit $b \leq y_t$ gibt es einen Punkt $S = (x_s, y_s)$ mit der folgenden Eigenschaft:

$$\begin{aligned}
&1.\ y_s \leq y_t \\
&2.\ S \in A \cup B \cup C \\
&3.\ \overline{TS} \subset A \cup B \cup C, \text{ wobei } T = (0, y_t) \\
&4.\ |\overline{TS}| = l
\end{aligned} \tag{3}$$

Diese Bedingung gilt sogar für beide Fälle: $l > a$ und $l \leq a$. Mithin ist (3) eine anschaulich klare und mathematisch sinnvolle Definition für das "Schieben" durch die Röhre.

3 Ein Hilfssatz

Wir beweisen jetzt zunächst eine Hilfssatz, der uns einen plausiblen Kandidaten für die gesuchte Strecke liefert:

Satz 1 *Unter allen Strecken, deren Endpunkte auf der x-Achse bzw. auf der y-Achse liegen und die durch den Punkt $P = (a, b)$ gehen, gibt es eine von kleinster Länge.*

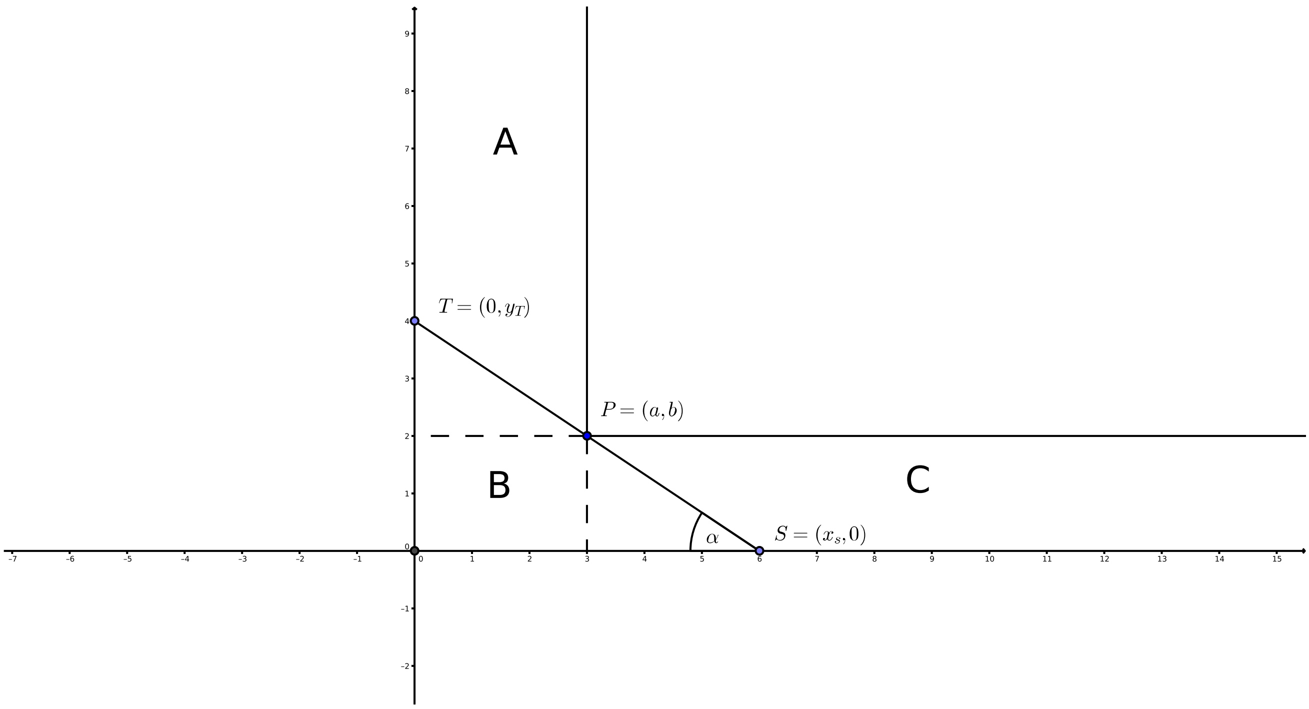

Abbildung 4: Hilfssatz

__**Beweis:**__

In der obigen Zeichnung hat die Gerade durch S und T die Gleichung

$$y = mx + (b - am)$$

wobei m der Anstieg der Geraden ist. Diese Gleichung ergibt sich aus der sog. Punkt-Anstiegs-Formel der Geraden: geht eine Gerade durch den Punkt $P = (a, b)$ und hat den Anstieg m, so gilt für alle Punkte (x, y), die auf der Geraden liegen und verschieden von P sind, die Gleichung

$$\frac{y - y_P}{x - x_P} = m$$

Setzt man in dieser Gleichung $P = (a, b)$ ein, so ergibt sich obige Gleichung, wobei dort der Anstieg durch

$$m = -tan(\alpha)$$

gegeben ist.

Wie man sieht, ist die Länge der Strecke abhängig vom Anstieg m. Genauer gilt:

$$
\begin{aligned}
\text{Länge von } \overline{TS} &= |\overline{TS}| \\
&= \frac{y_T}{\sin(\alpha)} \\
&= \frac{b - am}{\sin(\alpha)} \\
&= \frac{b}{\sin(\alpha)} + \frac{a}{\cos(\alpha)} \\
&=: f(\alpha)
\end{aligned} \tag{4}
$$

Jetzt bestimmen wir das Minimum dieser Funktion f, deren Definitionsbereich das offene Intervall $(0, \pi/2)$ ist. Es gilt

$$f'(\alpha) = -\frac{b \cdot \cos(\alpha)}{\sin^2(\alpha)} + \frac{a \cdot \sin(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}$$

Daher ist

$$
\begin{aligned}
f'(\alpha) = 0 &\iff a \cdot \sin^3(\alpha) - b \cdot \cos^3(\alpha) = 0 \\
&\iff \tan^3(\alpha) = 0
\end{aligned} \tag{5}
$$

Es gibt also einen Winkel α_0, für den $\tan(\alpha_0) = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ gilt und der eine Nullstelle von f' ist. Ich behaupte, daß α_0 sogar eine Minimumsstelle von f ist. Um das zu beweisen, betrachten wir das Verhalten der Ableitung f' links von α_0 und rechts von α_0.

Innerhalb des Definitonsbereichs $(0, \pi/2)$ von f gilt:

$$
\begin{aligned}
\alpha < \alpha_0 \quad \Longrightarrow \quad && \tan(\alpha) &< \tan(\alpha_0) \\
\Longrightarrow \quad && \frac{\sin^3(\alpha)}{\cos^3(\alpha)} &< \frac{b}{a} \\
\Longrightarrow \quad && a \cdot \sin^3(\alpha) &< b \cdot \cos^3(\alpha) \\
\Longrightarrow \quad && \frac{a \cdot \sin(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} &< \frac{b \cdot \cos(\alpha)}{\sin^2(\alpha)} \\
\Longrightarrow \quad && \frac{a \cdot \sin(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} - \frac{b \cdot \cos(\alpha)}{\sin^2(\alpha)} = f'(\alpha) &< 0
\end{aligned}
$$

Analog beweist man:

$$\alpha > \alpha_0 \Longrightarrow f'(\alpha) > 0$$

Links von α_0 fällt die Funktion f also, rechts davon steigt sie: α_0 ist also eine Minimumsstelle von f.

4 Finale

Für die weiteren Ausführungen seien nun T_0 auf der y-Achse und S_0 auf der x-Achse so gewählt, daß die Länge der Strecke $\overline{T_0 S_0}$ gemäß Hilfssatz minimal wird. Wir bezeichnen diese Länge im folgenden mit l_0.

Von meinem damaligen Mathematiklehrer stammt der folgende, für ihn typische Satz:

Behauptung 4.1 *Neue, merkmürdig erscheinende und unerwartete Behauptung: l_0 ist die gesuchte maximale Länge.*

Zum Beweis dieser Behauptung gehen wir folgendermaßen vor: in einem ersten Schritt zeigen wir, daß jede Zahl l, die die Eigenschaft (3) hat, kleiner oder gleich l_0 ist. Im zweiten Schritt beweisen wir dann, daß l_0 selbst die Eigenschaft (3) erfüllt, womit alles gezeigt wäre.

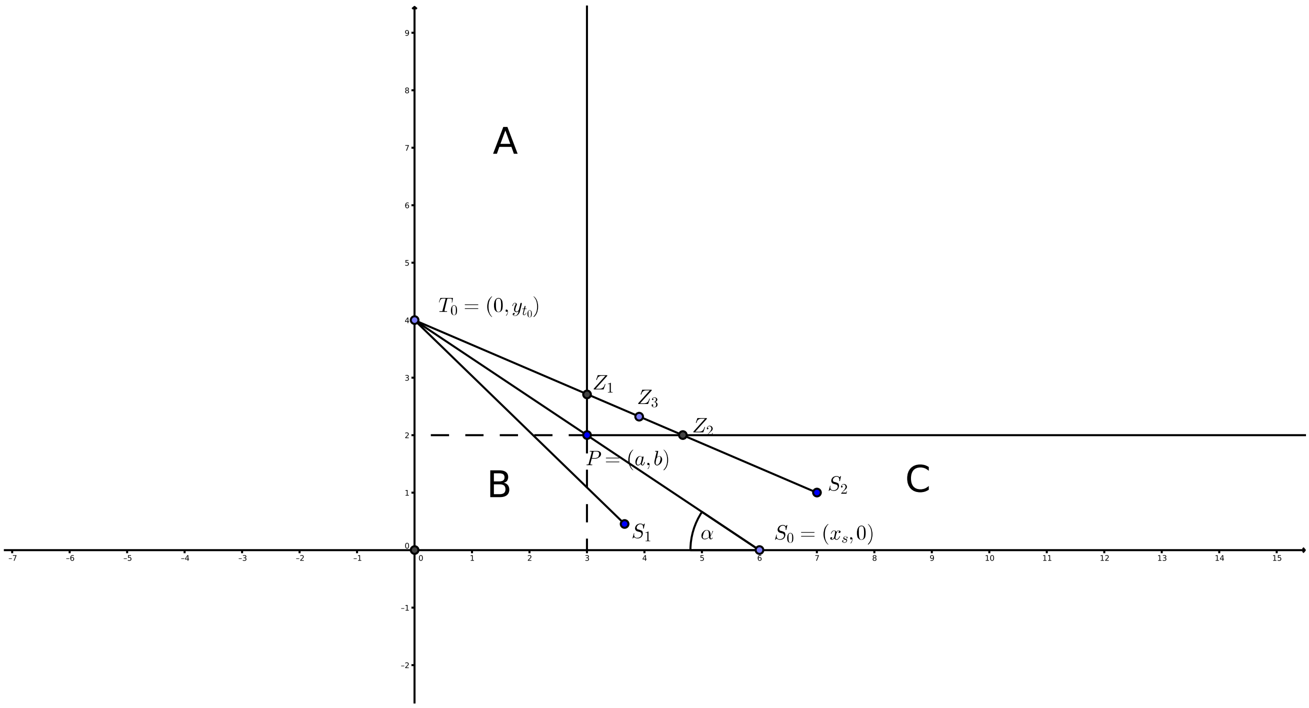

Abbildung 5: Letzter Schritt des Beweises

Zum Beweis des ersten Schrittes nehmen wir also eine Zahl l, die die Eigenschaft (3) erfüllt. Weil $\overline{T_0P}$ ja nur eine Teilstrecke von $\overline{T_0S_0}$ ist, ist ihre Länge natürlich kleiner als l_0. Mithin ist für uns auch nur der Fall $l > |\overline{T_0P}|$ interessant, weil sonst ja schon $l < l_0$ folgt. Wir nehmen uns jetzt die Zahl y_{t_0} vor, die ja durch den Hilfssatz fest gegeben ist. Nach Voraussetzung gibt es jetzt einen Punkt $S = (x_s, y_s)$ mit der Eigenschaft (3). Unsere Strecke $\overline{T_0S}$ hat die Länge l und paßt durch die gesamte Röhre, liegt also komplett in $A \cup B \cup C$.

Aus unseren Voraussetzungen können wir nun folgern, daß der Punkt S in $B \cup C$ liegt, daß also $y_s < b$ gilt. Warum? Wenn $y_s \geq b$ wäre, so wäre ja

$$\begin{array}{rcl} l = |\overline{T_0S}| & = & \sqrt{(y_{t_0} - y_s)^2 + {x_s}^2} \\ & \leq & \sqrt{(y_{t_0} - y_s)^2 + {x_P}^2} \text{ (da } x_s \leq a = x_P \text{ in } A) \\ & \leq & \sqrt{(y_{t_0} - y_P)^2 + {x_P}^2} \text{ (da } y_P = b \leq y_S) \\ & = & |\overline{T_0P}| \end{array}$$

Mithin wäre $l \leq |\overline{T_0P}|$ im Widerspruch zur Voraussetzung $l > |\overline{T_0P}|$! Wir haben also gezeigt, daß $y_S < b$ ist.

Als nächstes zeigen wir, daß nur der Fall $x_S > x_{S_0}$ interessant ist. Denn wenn der Punkt S links von S_0 liegt, dann ergibt sich

$$|\overline{T_0S}|^2 = (y_{T_0} - y_S)^2 + x_S^2 \leq (y_{T_0} - y_S)^2 + x_{S_0}^2 < y_{T_0}^2 + x_{S_0}^2 = l_0^2$$

woraus folgen würde, daß $l = |\overline{T_0S}| \leq l_0$ gilt. D.h. in diesem Fall sind wir fertig.

Es bleibt jetzt also nur noch der Fall zu untersuchen, daß $x_S > x_{S_0}$ gilt, daß also der Punkt S rechts von S_0 liegt. Diesem Fall entspricht die Strecke $\overline{T_0S_2}$ in der obigen Zeichnung. Anschaulich erkennt man, daß es auf dieser Strecke Punkte geben muß, die nicht in $A \cup B \cup C$ liegen, m.a.W. einen Punkt mit Koordinaten (x, y), für den gilt:

$$x > a \text{ und } y > b$$

Als Kandidat für diesen Punkt käme etwa der Punkt Z_3 in obiger Abbildung 5 in Frage. Um diesen Punkt zu bestimmen, berechnen wir die Schnittpunkte der Geraden durch T_0 und S mit der Parallelen zur y-Achse durch $P = (a, b)$ (das ist in obiger Zeichnung der Punkt Z_1) und der Parallelen zur x-Achse durch P (in obiger Abbildung der Punkt Z_2).

Für die weiteren Berechnungen brauchen wir aus dem Hilfssatz die Koordinaten der Punkte T_0 und S_0:

$$x_{S_0} = a + \frac{b}{\sqrt[3]{\frac{b}{a}}}$$

$$y_{T_0} = b + a \cdot \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$$

Von dem Punkt Z_2 wissen wir, daß er die y-Koordinate b hat und auf der Geraden durch T_0 und S liegt, d.h. er erfüllt die Geradengleichung

$$y - y_S = \frac{y_{T_0} - y_S}{x_{T_0} - x_S}(x - x_S)$$

Setzt man darin die Koordinaten (x_{Z_2}, b) von Z_2 ein, so erhält man:

$$\begin{aligned}
& b - y_S = \frac{y_{T_0} - y_S}{-x_S}(x_{Z_2} - x_S) \\
\Longrightarrow \quad & \frac{b - y_S}{y_{T_0} - y_S}(-x_S) = x_{Z_2} - x_S \\
\Longrightarrow \quad & x_{Z_2} = x_S \left(1 - \frac{b - y_s}{y_{T_0} - y_S}\right) = x_S \frac{y_{T_0} - y_S + y_S - b}{y_{T_0} - y_S} \\
\Longrightarrow \quad & x_{Z_2} = x_S \frac{y_{T_0} - b}{y_{T_0} - y_S}
\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung wissen wir, daß

$$x_S > x_{S_0} = a + \frac{b}{q} \text{ mit } q := \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$$

ist. Daraus ergibt sich für x_{Z_2}:

$$\begin{aligned}
x_{Z_2} &> x_{S_0} \cdot \frac{y_{T_0} - b}{y_{T_0} - y_S} \\
&= \left(a + \frac{b}{q}\right) \frac{aq}{b + aq - y_S} \\
&= \frac{b + aq}{q} \cdot \frac{aq}{b + aq - y_S} \\
&= \frac{(b + aq)a}{b + aq - y_S} \\
&> \frac{(b + aq)a}{b + aq} = a
\end{aligned}$$

Jetzt definieren wir den Punkt Z_3 auf der Geraden durch T_0 und S:

$$x_{Z_3} := a + \frac{1}{2}(x_{Z_2} - a) = \frac{a + x_{Z_2}}{2}$$

.

Da Z_3 auf der Geraden durch T_0 und S liegen soll, erhalten wir für die y-Koordinate y_{Z_3}

$$y_{Z_3} - y_S = \frac{y_S - y_{T_0}}{x_S - x_{T_0}} \left(\frac{a + x_{Z_2}}{2} - x_S \right) \tag{6}$$

Jetzt zeigen wir, daß Z_3 nicht mehr in $A \cup B \cup C$ liegt. Wegen

$$x_{Z_3} := \frac{a + x_{Z_2}}{2} > \frac{a + a}{2} = a$$

reicht es zu zeigen, daß $y_{Z_3} > b$ ist. Wir können dies durch schrittweise Umformung von Gleichung (6) erreichen:

$$\begin{array}{rrcl}
 & y_{Z_3} & > & b \\
\Longleftrightarrow & y_S + \dfrac{y_S - y_{T_0}}{x_S} \left(\dfrac{a + x_{Z_2}}{2} - x_S \right) & > & b \\
\Longleftrightarrow & y_S - b + \dfrac{y_S - y_{T_0}}{x_S} \left(\dfrac{a + x_{Z_2}}{2} - x_S \right) & > & 0 \\
\Longleftrightarrow & (y_S - b)x_S + \left(y_S - y_{T_0} \right) \left(\dfrac{a + x_{Z_2}}{2} - x_S \right) & > & 0 \\
\Longleftrightarrow & y_S \cdot x_S - b \cdot x_S + y_S \cdot \dfrac{a + x_{Z_2}}{2} - y_S \cdot x_S - y_{T_0} \cdot \dfrac{a + x_{Z_2}}{2} + y_{T_0} x_S & > & 0 \\
\Longleftrightarrow & x_S(y_{T_0} - b) + \dfrac{a + x_{Z_2}}{2} \left(y_S - y_{T_0} \right) & > & 0
\end{array}$$

Wir wissen, daß $x_{Z_2} > a$ ist, außerdem ist $y_S - y_{T_0} < 0$ und $x_S > x_{S_0}$. Mit der Abkürzung $q := \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ können wir daraus folgern, daß

$$\begin{array}{rcl}
x_S(y_{T_0} - b) + \dfrac{a + x_{Z_2}}{2} \left(y_S - y_{T_0} \right) & > & x_S(y_{T_0} - b) + a \cdot \left(y_S - y_{T_0} \right) \\
 & > & x_{S_0}(y_{T_0} - b) + a \cdot \left(y_S - y_{T_0} \right) \\
 & = & \left(a + \frac{b}{q} \right) \cdot q + a \cdot \left(y_S - y_{T_0} \right) \\
 & = & a^2 q + ab + a y_S - a y_{T_0} \\
 & = & a^2 q + ab + a y_S - ab - a^2 q \\
 & = & a \cdot y_S > 0
\end{array}$$

Mithin haben wir gezeigt, daß

$$x_{Z_3} > a \text{ und } y_{Z_3} > b$$

sind, so daß also der Punkt Z_3 nicht in $A \cup B \cup C$ liegt. Also war auch die ursprüngliche Annahme $x_S > x_{S_0}$ falsch, und damit haben wir letztendlich bewiesen, daß

$$l \leq l_0$$

gelten muß.

Im letzten Schritt beweisen wir noch, daß l_0 selbst die Eigenschaft (3) besitzt. Dies sieht man folgendermaßen ein: legt man durch irgendeinen Punkt T_1 auf der y-Achse (oberhalb B) eine Gerade, auf der auch $P = (a, b)$ liegt, und bezeichnet den Schnittpunkt dieser Geraden mit der x-Achse mit S_1, so ist die Strecke $\overline{T_1 S_1}$ wegen der Minimalität von l_0 auf jeden Fall länger als l_0 (oder gleich lang). Somit gibt es auf $\overline{T_1 S_1}$ immer eine Teilstrecke der Länge l_0, und damit ist die Eigenschaft (3) erfüllt, q.e.d.